

Abb. 8. Temperaturabhängigkeit der Kristallenergie von Ni.

Term so groß wird, daß ein Umschlag des Vorzeichens der Anisotropie eintritt. Wie sich dies, bei

alleiniger Berücksichtigung des quadratischen Terms in T , auf die makroskopische Kristallenergie von Nickel auswirkt, ist in Abb. 8 dargestellt. Auch die Abweichung vom $[M(T)/M(0)]^{10}$ -Gesetz bei Eisen, die erst kürzlich von GRAHAM²⁸ gefunden wurde, könnte auf diese Weise durch den temperaturabhängigen Teil von $K_{1,\text{lokal}}$ erklärt werden.

Herrn Professor Dr. U. DEHLINGER danke ich für sein ständiges Interesse am Fortgang der Arbeit und für zahlreiche Anregungen. Herrn Prof. Dr. J. KELLER und Herrn Prof. Dr. A. SEEGER möchte ich für wertvolle Hinweise danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

²⁸ C. D. GRAHAM, Phys. Rev. **112**, 1117 [1958].

Hall-Effekt in Halbleitern mit p-n-Übergang

Von OTFRIED MADELUNG *

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG., Erlangen
(Z. Naturforsch. **14 a**, 951—958 [1959]; eingegangen am 26. September 1959)

Die Theorie des HALL-Effektes in Halbleitern wird auf den Fall verallgemeinert, daß der Halbleiter einen oder mehrere p-n-Übergänge enthält, die so orientiert sind, daß die von den gekreuzten Feldern herrührende LORENTZ-Kraft senkrecht zu ihnen gerichtet ist. Es zeigt sich zunächst, daß die Aufnahme der für die Erzeugung der HALL-Feldstärke notwendigen Zusatz-Raumladungen in dem Raumladungsgebiet des Übergangs (wie auch in dem Raumladungsgebiet einer SCHOTTKYSCHEN Sperrsicht) ohne einen anomalen Beitrag zur HALL-Spannung erfolgt, daß jedoch ein zusätzliches floating-Potential auftritt, wenn in den Homogengebieten beiderseits des Übergangs ambipolare Ströme verschiedener Größe fließen. Dieses floating-Potential ist der HALL-Spannung des schwächer dotierten Gebietes (genauer des Gebietes, in dem der größere ambipolare Strom fließt) entgegengerichtet und kann unter günstigen Umständen die HALL-Spannung dieses Gebietes kompensieren, besonders dann, wenn die Beweglichkeit der Minoritätsträger die der Majoritätsträger weit übersteigt.

Die Theorie wird für verschiedene Grenzfälle diskutiert und ihre Anwendungsmöglichkeit zur Deutung des von FOLBERTH und WEISS gefundenen doppelten Nulldurchgangs des HALL-Koeffizienten von p-InAs besprochen.

Das Auftreten einer HALL-Spannung in festen Körpern beruht auf der Forderung, daß senkrecht zum angelegten Magnetfeld und zum primären elektrischen Feld kein Ladungstransport stattfinden darf. Diese Forderung bedeutet in Störstellenhalbleitern ein Verschwinden der Komponenten des Teilchenstromes in dieser Richtung. In gemischten Halbleitern dagegen kann ein ambipolarer Elektron-Loch-Paar-Strom fließen, da ein solcher keine Ladung mit sich führt. Ambipolare Ströme wurden zuerst von WELKER¹ für den Fall des Eigenhalbleiters in die

Theorie des HALL-Effektes eingeführt (magnetische Sperrsicht), und später von BANBURY, HENISCH und MANY² und von LANDAUER und SWANSON³ für gemischte Leiter diskutiert.

Die LORENTZ-Kraft eines elektromagnetischen Feldes ist nicht die einzige Ursache für das Auftreten ambipolarer Ströme in Halbleitern. Temperaturgradienten rufen in gemischten Halbleitern einen gleichgerichteten Strom von Elektronen und Löchern hervor, dessen Bedeutung für den Energietransport bei der Wärmeleitung zuerst von PRICE⁴ erkannt

* Neue Adresse: Institut für Struktur der Materie, Universität Marburg/Lahn, Renthof 5.

¹ H. WELKER, *L'onde électrique* **30**, 309 [1950]; Z. Naturforsch. **6 a**, 184 [1951].

² P. C. BANBURY, H. K. HENISCH u. A. MANY, Proc. Phys. Soc., Lond. **66 a**, 753 [1953].

³ R. LANDAUER u. J. SWANSON, Phys. Rev. **91**, 555 [1953].

⁴ P. J. PRICE, Phil. Mag. **46**, 1252 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

wurde. Weiter fließen ambipolare Ströme als Diffusionsströme beim Auftreten von Dichtegradienten in inhomogenen Halbleitern und bei neutralen Dichteabweichungen, die durch Lichteinstrahlung oder Injektion verursacht sind, auch in homogenen Halbleitern. Hier ist vor allem der Fall interessant, daß der ambipolare Diffusionsstrom auf einen p-n-Übergang trifft. Ein unbelasteter p-n-Übergang ist für Minoritätsträger durchlässig, für Majoritätsträger nicht. Die Folge ist, daß im stationären Zustand am p-n-Übergang eine Sperrspannung auftritt, die bei durch Lichteinstrahlung erzeugten ambipolaren Strömen als *Photospannung*⁵, im Falle der Injektion aus einem benachbarten Übergang als *floating-Potential*⁶ bezeichnet wird. Das Auftreten eines solchen floating-Potentials ist nicht an den Diffusionscharakter des ambipolaren Stromes gebunden. Von BANBURY, HENISCH und MANY² wurde zuerst betont, daß auch beim HALL-Effekt in gemischten Leitern floating-Potentiale auftreten können, falls die HALL-Sonden Gleichrichtereigenschaften aufweisen. Eine Theorie dieses Effektes wurde jedoch nicht gegeben.

In der vorliegenden Arbeit soll das Auftreten von floating-Potentialen in p-n-Übergängen näher untersucht werden für den Fall, daß die ambipolaren Ströme durch die LORENTZ-Kraft eines elektromagnetischen Feldes verursacht werden.

Theorie

Wir betrachten zunächst folgendes Modell: Ein Halbleiter enthalte einen p-n-Übergang in der $x-z$ -Ebene des Koordinatensystems. In y -Richtung erstrecke sich das p-Gebiet von $y=0$ in Richtung der negativen y -Achse, das n-Gebiet in Richtung der positiven y -Achse (Abb. 1). Die freien Oberflächen

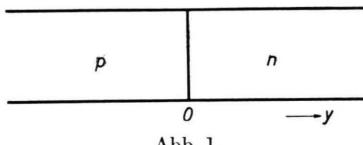


Abb. 1.

dieser beiden Gebiete in y -Richtung oder weitere Kontakte seien weit entfernt (Abstand groß gegen die Diffusionslängen). In x -Richtung liege am Halbleiter ein elektrisches Feld, in z -Richtung ein Magnetfeld. Dann wirkt eine LORENTZ-Kraft auf die La-

⁵ Vgl. z. B. E. S. RITTNER, Photoconductivity Conference, New York, J. Wiley and Sons 1956, S. 250 ff.

⁶ W. SHOCKLEY, Bell Syst. Techn. J. **28**, 435 [1949].

dungsträger in y -Richtung. Gefragt sei im folgenden nach der resultierenden HALL-Spannung und ihrer Aufteilung auf die Homogengebiete und den p-n-Übergang.

Betrachten wir zunächst die Homogengebiete: Auf Grund der LORENTZ-Kraft werden die Ladungsträger in der y -Richtung verschoben, bis sich durch Ausbildung einer HALL-Spannung ein stromloser stationärer Zustand eingestellt hat. Die HALL-Feldstärke in den Homogengebieten wird durch Raumladungen an den Grenzflächen hervorgerufen. Die Homogengebiete selbst bleiben raumladungsfrei, jedoch können in ihnen neutrale Dichteabweichungen auftreten.

Auf die Raumladungen an den Grenzflächen gehen wir später. In den neutralen Gebieten sind die Teilchenströme der Elektronen und Löcher gegeben durch:

$$j_n = -\mu_n n E_y - \mu_n^2 n E_x B_z - D_n \delta n', \quad (1)$$

$$\delta n = \delta p.$$

$$j_p = \mu_p p E_y - \mu_p^2 p E_x B_z - D_p \delta p', \quad (2)$$

(Statistische Faktoren wie $3\pi/8$ lassen wir hier unberücksichtigt.) Da unter den hier betrachteten Voraussetzungen kein Ladungstransport in der y -Richtung stattfinden darf, muß $j_n = j_p = j$ sein, d. h. es dürfen nur ambipolare Ströme fließen. Durch Gleichsetzen von (1) und (2) findet man dann für die resultierende HALL-Feldstärke:

$$E_y = -\frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{\mu_n n + \mu_p p} E_x B_z - \frac{k T}{e} \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_n n + \mu_p p} \delta n' \quad (3)$$

und für den (ambipolaren) Elektron-Loch-Paarstrom j durch Einsetzen von (3) in (1) oder (2):

$$j = -\frac{\mu_n + \mu_p}{\mu_n n + \mu_p p} n p \mu_n \mu_p E_x B_z \quad (4)$$

$$-\frac{k T}{e} \mu_n \mu_p \frac{n + p}{\mu_n n + \mu_p p} \delta n'.$$

Beschränkt man sich auf kleine Dichteabweichungen (Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung δn^2 , $\delta n \delta n'$), so vereinfachen sich (4) und (3) zu:

$$E_y = E_{y0} + \frac{(\mu_n + \mu_p)(n_0 - p_0)}{(\mu_n n_0 + \mu_p p_0)^2} \mu_n \mu_p E_x B_z \delta n \quad (5)$$

$$-\frac{k T}{e} \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0} \delta n',$$

$$j = j_0 - \frac{(\mu_n + \mu_p)(\mu_n n_0^2 + \mu_p p_0^2)}{(\mu_n n_0 + \mu_p p_0)^2} \mu_n \mu_p E_x B_z \delta n \quad (6)$$

$$-\frac{k T}{e} \mu_n \mu_p \frac{n_0 + p_0}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0} \delta n',$$

wo der Index 0 die entsprechenden Werte für $\delta n = 0$ bezeichnet.

Eine wesentliche Vereinfachung erhält man bei starker Dotierung, d. h. wenn $\mu_n n_0 \gg \mu_p p_0$ oder $\mu_p p_0 \gg \mu_n n_0$ ist. Dann wird nämlich für *n-Leiter*:

$$E_y = -\mu_n E_x B_z + (\mu_n + \mu_p) E_x B_z \frac{\mu_p \delta n}{\mu_n n_0} - \frac{k T}{e} \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_n n_0} \delta n' \quad (7)$$

$$j = -(\mu_n + \mu_p) E_x B_z \mu_p p - \frac{k T}{e} \mu_p \delta n' \quad (8)$$

p-Leiter:

$$E_y = \mu_p E_x B_z - (\mu_n + \mu_p) E_x B_z \frac{\mu_n \delta n}{\mu_p p_0} - \frac{k T}{e} \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_p p_0} \delta n' \quad (9)$$

$$j = -(\mu_n + \mu_p) E_x B_z \mu_n n - \frac{k T}{e} \mu_n \delta n' \quad (10)$$

Die DichteVerteilung der Elektronen und Löcher erhält man jetzt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dy} j = -\frac{\delta n}{\tau},$$

wo τ die Lebensdauer der Elektron-Loch-Paare ist.

Durch Einführung der ambipolaren Diffusionskonstanten D und einer charakteristischen Länge γ

$$D = \frac{k T}{e} \mu_n \mu_p \frac{n_0 + p_0}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{e}{2 k T} \frac{\mu_n + \mu_p}{n_0 + p_0} \frac{\mu_n n_0^2 + \mu_p p_0^2}{\mu_n n_0 + \mu_p p_0} E_x B_z \quad (13)$$

$$= \frac{e}{2 k T} (\mu_n + \mu_p) E_x B_z \text{ für starke Dotierung}$$

[vgl. Gln. (7) – (10)] (13 a)

vereinfacht sich (6) zu

$$j = j_0 - D \left(\frac{2}{\gamma} \delta n + \delta n' \right) \quad (14)$$

und die Kontinuitätsgleichung zu

$$\delta n'' + \frac{2}{\gamma} \delta n' - \frac{1}{L^2} \delta n = 0, \quad L^2 = D \tau, \quad (15)$$

mit der Lösung

$$\delta n = C_1 \exp \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{y}{\gamma} \right) + C_2 \exp \left(-\frac{y}{\lambda} - \frac{y}{\gamma} \right); \quad (16)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{L^2}.$$

Zur Bestimmung der Randbedingungen müssen wir das Zustandekommen der HALL-Feldstärke in den Neutralgebieten näher diskutieren. In einem homogenen Halbleiter geschieht dies durch Ausbildung von Raumladungen der Dicke weniger DEBYE-Längen an den Oberflächen. Diesen Beitrag erhalten wir hier auch von den freien Oberflächen des p- und n-Gebietes. Wir können ihn zunächst unberücksichtigt lassen, da diese Oberflächen viele Diffusionslängen vom p-n-Übergang entfernt sein sollen, also Gebiete mit $\delta n = 0$ zwischen dem Übergang und weiteren Grenzflächen liegen. Als Randbedingungen für große $|y|$ wählen wir also

$$\delta n = 0 \quad \text{für } y = \pm \infty. \quad (17)$$

Bevor wir die Randbedingungen am p-n-Übergang diskutieren, betrachten wir einen wesentlich einfacheren Fall, der uns später weiterhelfen wird, den *HALL-Effekt in einer SCHOTTKYSCHEN Randschicht*.

Dazu benutzen wir das übliche Modell⁷: Kontakt Metall – Halbleiter, Grenze bei $y = 0$, Dicke der Raumladungsschicht l , parabolischer Potentialverlauf in der Sperrsicht (Annahme einer konstanten Raumladung $e n_H$), n-Leiter, Elektronendichte am Rand $n_R = n_H \exp(-e V_D/kT)$, n_H = Elektronendichte im Inneren des Halbleiters, V_D = Diffusionsspannung, keine Minoritätsträger.

Da wir hier nur eine Ladungsträgersorte zu berücksichtigen haben, gilt Gl. (1) allein auch in der Randschicht. Auflösung von (1) nach E_y und Integration über die Randschicht liefert für die an der Randschicht liegende Spannung im stromlosen Fall ($j = 0$):

$$V = \int_0^l E_y dy = -\mu_n E_x B_z l - \frac{k T}{e} \ln \frac{n_H}{n_R}. \quad (18)$$

Hier beschreibt das zweite Glied die normale Diffusionsspannung und das erste Glied eine HALL-Spannung, die sich von der des neutralen Halbleiterinneren nicht unterscheidet. Die Randschicht liefert also keinen anomalen Beitrag zur Gesamt-HALL-Spannung.

Es ist hier von Interesse, die Änderung der Ladungsträerverteilung durch das Magnetfeld zu berechnen. Führt man die Rechnung unter den oben angeführten Annahmen durch (für den entsprechenden Fall ohne Magnetfeld; vgl. Anm.⁷), so findet man, daß sich die Dicke l der Sperrsicht im Magnetfeld darstellen läßt durch

$$l = -\frac{e}{k T} L_D^2 E_H + \left(\left(\frac{e}{k T} L_D^2 E_H \right)^2 + \frac{2 e}{k T} V_D L_D^2 \right)^{1/2} \quad (19)$$

⁷ Vgl. z. B. O. MADELUNG: Handbuch der Physik, Bd. 20, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956, S. 192.

mit der HALL-Feldstärke $E_H = -\mu_n E_x B_z$ und der DEBYE-Länge $L_D = (\epsilon \epsilon_0 k T / e^2 n_H)^{1/2}$. Nimmt man an, daß sich l nur wenig von dem Wert l_0 des magnetfeldfreien Falles unterscheidet, so findet man in erster Näherung für die Dickenänderung der Sperrsicht $\Delta l = |l - l_0|$:

$$\Delta l = \frac{e}{k T} |E_H| L_D^2. \quad (20)$$

Damit verbunden ist eine zusätzliche (positive oder negative) Raumladung der Sperrsicht

$$\Delta Q = e n_H \Delta l = \epsilon \epsilon_0 |E_H|, \quad (21)$$

wie sofort durch Einsetzen des Ausdrucks für L_D in (20) folgt.

Das Ergebnis ist also: Durch den HALL-Effekt in der Sperrsicht wird unter Änderung ihrer Dicke eine zusätzliche Raumladung in die Sperrsicht eingeführt. Diese Raumladung hat eine solche Größe, daß sie 1. durch das mit ihr verbundene elektrische Feld die LORENTZ-Kraft auf die Elektronen kompensiert und damit für die geforderte Stromlosigkeit sorgt und 2. als eine Seite einer Doppelschicht nach (21) gerade die richtige HALL-Feldstärke E_H im neutralen Inneren des Halbleiters aufrechterhält. Die HALL-Spannung in der Randschicht ist gleich der eines entsprechenden Stückes des neutralen Halbleiterinneren, d. h. $= E_H l$.

Ähnlich werden die Verhältnisse bei einem Metall-Halbleiterkontakt mit Minoritätsträgern (mit und ohne Inversionsschicht) und bei einem p-n-Übergang liegen. Der Kontakt ohne Inversionsschicht liefert nichts Neues. Die Dichte der Minoritätsträger wird überall in der Randschicht, vielleicht mit Ausnahme einer sehr dünnen Schicht in unmittelbarer Kontakt-nähe, sehr klein gegen die der Majoritätsträger, so daß die HALL-Spannung der Randschicht praktisch gleich $E_H l$ bleibt. Bei p-n-Übergängen und Kontakten mit Inversionsschicht wird wieder (hinreichend hohe Dotierung vorausgesetzt) der Bereich innerhalb des Raumladungsgebietes, in dem Elektronen und Löcher einen Beitrag zur HALL-Spannung liefern, vernachlässigbar klein sein, so daß die resultierende HALL-Spannung sich additiv aus den Beiträgen des überwiegend n-leitenden und des überwiegend p-leitenden Teiles in der Form

$$-\mu_n E_x B_z l_n + \mu_p E_x B_z l_p$$

zusammensetzt. Die Aufnahme der zum Aufspannen einer HALL-Feldstärke in einem Halbleiter notwendigen Raumladungen in Randschichten oder p-n-Über-

gängen erfolgt also in erster Näherung so, daß für die Berechnung der HALL-Spannung keine anomalen Beiträge dieser Gebiete in Rechnung zu setzen sind.

Ein anomaler Beitrag eines p-n-Übergangs zur HALL-Spannung ist jedoch zu erwarten, wenn infolge gleichzeitiger Anwesenheit von Majoritätsträgern und Minoritätsträgern in den beiden Homogengebieten ambipolare Ströme fließen. Beschränken wir uns zunächst auf das am Anfang aufgestellte Modell des p-n-Übergangs zwischen breiten homogenen p- bzw. n-Gebieten und wählen für das Verhalten des p-n-Übergangs den SHOCKLEYSchen Grenzfall vernachlässigbarer Rekombination im Übergang, so wird sich folgender Sachverhalt einstellen:

Die ambipolaren Ströme sind in den beiden Homogengebieten in großem Abstand vom Übergang im allgemeinen verschieden, nämlich nach (8) bzw. (10) mit $\delta n = 0$ proportional $\mu_{\text{Min}} n_{\text{Min}}$. Unmittelbar an den beiden Begrenzungen des Übergangs müssen sie jedoch die gleiche Größe haben, da im Übergang ein Rekombination ausgeschlossen ist. Eine Änderung von j in den Homogengebieten bei Annäherung an den Übergang erfolgt durch Dichtegradienten, die sich dadurch gebildet haben, daß ein p-n-Übergang für Minoritätsträger zwar durchlässig, für Majoritätsträger aber undurchlässig ist.

Diese Dichteabweichungen verursachen vom Übergang weg oder zum Übergang hin gerichtete Diffusionsströme, die für eine Gleichheit der ambipolaren Ströme am Übergang sorgen. Dichteabweichungen der Minoritätsträger unmittelbar am p-n-Übergang bedeuten aber das Auftreten eines *floating Potentials* im Übergang. Wir haben hier die gleichen Verhältnisse vorliegen, wie beim Photoeffekt in p-n-Übergängen, nur daß es sich dort um ambipolare Diffusionsströme, hier aber um ambipolare „HALL-Ströme“ handelt. Außerdem kann beim Photoeffekt unmittelbar am Übergang nur eine Dichteüberhöhung, hier jedoch durch Wegtreiben von Ladungsträgern auch ein Dichteunderschub erzielt werden.

Aus diesen Überlegungen finden wir die noch fehlenden Randbedingungen zu (16). Ist $\delta\psi$ das *floating-Potential* des Übergangs, so sind bekanntlich die Minoritätsträgerdichten im p- und n-Gebiet unmittelbar am Übergang gegeben durch

$$n = n_p e^{e \delta\psi/kT} \text{ und } p = p_n e^{e \delta\psi/kT}. \quad (22)$$

Die Randbedingungen für $\delta n = \delta p$ sind also:

$$\delta n = n_p (e^{e \delta\psi/kT} - 1) \quad (23)$$

an der Grenze p-Gebiet/Übergang,

$$\delta n = p_n (e^{e \delta \psi / kT} - 1) \quad (24)$$

an der Grenze Übergang/n-Gebiet,

und man erhält, wenn man die Breite des Übergangs vernachlässigt, also beide Grenzen in $y=0$ legt, als Lösung von (16) mit den Randbedingungen (17), (23) und (24)

$$\delta n = n_p (e^{e \delta \psi / kT} - 1) \exp\left(\frac{y}{\lambda_p} - \frac{y}{\gamma_p}\right) \text{ im p-Gebiet,} \quad (25)$$

$$\delta n = p_n (e^{e \delta \psi / kT} - 1) \exp\left(-\frac{y}{\lambda_n} - \frac{y}{\gamma_n}\right) \text{ im n-Gebiet.} \quad (26)$$

Setzt man (25) bzw. (26) in (14) ein, so erhält man die ambipolaren Ströme $j_{(n)}$ und $j_{(p)}$ in den beiden Homogengebieten in Abhängigkeit vom floating-Potential

$$j_{(n)} = j_{0(n)} + D_{(n)} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\gamma_n} \right) \delta n_{(n)} (\delta \psi), \quad (27)$$

$$j_{(p)} = j_{0(p)} - D_{(p)} \left(\frac{1}{\lambda_p} + \frac{1}{\gamma_p} \right) \delta n_{(p)} (\delta \psi). \quad (28)$$

$\delta \psi$ folgt hieraus durch Gleichsetzen von $j_{(n)}(0)$ und $j_{(p)}(0)$ zu

$$\delta \psi = \frac{k T}{e} \quad (29)$$

$$\cdot \ln \left(1 + \frac{j_{0(p)} - j_{0(n)}}{D_{(n)} p_n (1/\lambda_n - 1/\gamma_n) + D_{(p)} n_p (1/\lambda_p + 1/\gamma_p)} \right).$$

Bevor wir diese Gleichung erweitern und diskutieren, müssen wir noch einen weiteren hiermit verbundenen Beitrag zur Gesamt-HALL-Spannung berücksichtigen. Durch das Auftreten von Dichteabweichungen in den Homogengebieten wird die HALL-Spannung dieser Gebiete modifiziert. Den Beitrag der Dichteabweichungen erhält man aber sofort durch Integration der beiden letzten Glieder in Gl. (5) über die Homogengebiete. Wir geben hier nur das Resultat für starke Dotierung an, das man durch Integration der Gln. (7) und (9) erhält:

$$\Delta V_H = \frac{k T}{e} \frac{n_{\text{Min}}}{n_{\text{Maj}}} (e^{e \delta \psi / kT} - 1) \left(1 + \frac{\mu_{\text{Min}}}{\mu_{\text{Maj}}} \left(\frac{1 - \gamma / \lambda}{1 + \gamma / \lambda} \right) \right) \quad (30)$$

für jedes der beiden Gebiete. Für $\delta \psi \ll kT/e$ (dieser Fall ist praktisch immer realisiert), werden die $\delta \psi$ enthaltenen Klammern gleich $e \delta \psi / kT$ und die Zusatz-HALL-Spannungen werden proportional dem floating-Potential, dem Verhältnis von Minoritätssträgerdichte zu Majoritätssträgerdichte und einem Faktor, der maximal gleich $(1 \pm \text{Beweglichkeitsverhältnis})$ werden kann. Diese Beiträge sind also bei

hinreichend starker Dotierung gegen das floating-Potential vernachlässigbar.

Beschränken wir uns im weiteren auf den Fall hinreichend starker Dotierung, so werden nach Gl. (13 a) die γ in beiden Gebieten gleich und (29) kann in die folgende symmetrische Form gebracht werden:

$$\delta \psi = \frac{k T}{e} \ln \left(\frac{a - b}{a + b} \right), \quad a = \frac{D_n n_p}{\lambda_p} + \frac{D_p p_n}{\lambda_n}, \\ b = \frac{D_n n_p - D_p p_n}{\gamma}, \quad (31)$$

wo jetzt die D_n und D_p die Diffusionskoeffizienten der Minoritätsträger sind. Aus dieser Form erkennt man sofort, daß ein Vorzeichenwechsel der LORENTZ-Kraft lediglich einen Vorzeichenwechsel von b und damit des floating-Potentials hervorruft. Je nach Richtung der LORENTZ-Kraft wird also der Übergang in Sperr- oder Flußrichtung vorgespannt.

Eine weitere günstige Darstellung für $\delta \psi$ erhält man, wenn man als neue Variable $x = L_n / \gamma$ einführt. Mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\mu_p p_n}{\mu_n n_p} \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 = \frac{L_n^2}{L_p^2} = \frac{\mu_n \tau_n}{\mu_p \tau_p} \quad (32)$$

folgt aus (31)

$$\delta \psi = - \frac{2 k T}{e} \operatorname{Tg}^{-1} z, \quad z = \frac{x(1 - \alpha)}{\sqrt{1 + x^2 + \alpha \sqrt{\varepsilon^2 + x^2}}}. \quad (33)$$

Aus (33) erkennt man unter anderem, daß $\delta \psi$ für $\alpha = 0$ oder ∞ einen Maximalwert annimmt. Wir gehen auf diesen Fall sehr stark verschiedener Dotierung später noch genau ein.

Wir wollen nun die Theorie erweitern durch die Annahme, daß das n-Gebiet im Abstand d vom Übergang durch eine freie Oberfläche begrenzt ist. Dann tritt an die Stelle der Randbedingung (17) für das n-Gebiet die Bedingung

$$j_{(n)} = s \delta n \quad \text{für} \quad y = d \quad (34)$$

(s = Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit).

Dann wird mit

$$\delta_0 = \delta n(0) = p_n (e^{e \delta \psi / kT} - 1),$$

$$\delta n = C_1 \exp\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{y}{\gamma}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{y}{\lambda} - \frac{y}{\gamma}\right), \quad (35)$$

$$C_1 = \frac{1}{2 N} \left\{ j_0 e^{d/\gamma} - \delta_0 \left[s + D \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] e^{-d/\lambda} \right\},$$

$$C_2 = - \frac{1}{2 N} \left\{ j_0 e^{d/\gamma} - \delta_0 \left[s + D \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda} \right) \right] e^{d/\lambda} \right\},$$

$$N = \left(s + \frac{D}{\gamma} \right) \sin \frac{d}{\lambda} + \frac{D}{\lambda} \cos \frac{d}{\lambda}, \quad (36)$$

wobei hier und im folgenden die das n-Gebiet bezeichnenden Indizes fortgelassen werden. Für den ambipolaren Strom bei $y = 0$ ergibt sich

$$j(0) = j_0(1 + A) + \frac{\delta_0 D}{\lambda} (1 + B) - \frac{\delta_0 D}{\gamma}, \quad (37)$$

wobei die (für d gegen ∞ verschwindenden) Korrekturfaktoren A und B gegeben sind durch

$$A = -\frac{1}{N} \frac{D}{\lambda} e^{d/\gamma}, \quad B = \frac{1}{N} \left(s + D \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) e^{-d/\lambda}. \quad (38)$$

Für den Grenzfall $s = \infty$ [oder $\delta n(d) = 0$] wird (38)

$$A = 0, \quad B = \operatorname{Ctg} \frac{d}{\lambda} - 1. \quad (39)$$

Das floating-Potential unterscheidet sich von (29) nur durch die Korrekturfaktoren $(1 + A)$ bei $j_{0(n)}$ und $(1 + B)$ bei $1/\lambda_n$.

Diskussion

Die bisher angegebenen Gleichungen vereinfachen sich weitgehend, wenn man den Fall sehr stark verschieden dotierter Homogengebiete betrachtet. Wenn beispielsweise das n-Gebiet so hoch dotiert ist, daß in (32) $\alpha \ll 1$ wird, erhält man für das floating-Potential

$$\delta\psi = -\frac{2 k T}{e} \operatorname{Tg}^{-1} \frac{\lambda_p}{\gamma} = -\frac{2 k T}{e} \operatorname{Sin}^{-1} \frac{L_n}{\gamma}. \quad (40)$$

Das gleiche Ergebnis hätten wir auch erhalten, wenn wir den ambipolaren Strom an der Grenze p-Gebiet/Übergang gleich Null gesetzt hätten, denn die Forderung $\alpha \ll 1$ bedeutet $n_n \gg n_p$ oder auch $p_n \ll n_p$, und daraus folgt, daß der ambipolare Strom im n-Gebiet sehr klein gegen den im p-Gebiet wird. Das floating-Potential wird in diesem Grenzfall allein durch die Verhältnisse des p-Gebietes bestimmt. Damit läßt sich Gl. (40) aber auch übertragen auf den Fall, daß wir nur im p-Gebiet einen HALL-Effekt haben, also etwa auf den Fall eines p-Halbleiters im Magnetfeld, bei welchem die HALL-Sonde ein Kontakt mit unmittelbar vorgelagertem p-n-Übergang ist. Ferner erfaßt dieser Grenzfall einen p-Halbleiter mit Inversionsschicht, die durch einen p-n-Übergang vom Halbleiterinneren getrennt ist, aber durch eine Oberflächenbehandlung so stark gestört ist, daß in ihr keine Oberflächenleitung und damit keine HALL-Spannung auftritt.

Aus (13 a) folgt, daß γ das gleiche Vorzeichen hat wie die HALL-Spannung im p-Gebiet. Da anderer-

seits L_n positiv ist und $\operatorname{Sin}^{-1}(-x) = -\operatorname{Sin}^{-1}x$ gilt, folgt aus (40), daß die HALL-Spannung im p-Gebiet und das floating-Potential $\delta\psi$ hier immer *entgegengesetztes Vorzeichen* haben.

Allgemein folgt aus Gl. (29), daß *das floating-Potential immer der HALL-Spannung des Gebietes entgegengerichtet ist, in dem der größere ambipolare Strom fließt*, also im wesentlichen der HALL-Spannung des schwächer dotierten Gebietes. Wir wollen uns dieses nochmals an Hand der Abb. 2 klarmachen.

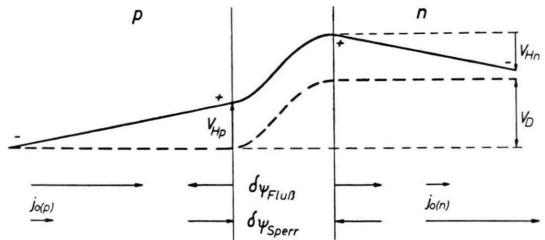


Abb. 2. Zum Vorzeichen des floating-Potentials; a) ohne Magnetfeld (---), b) im Magnetfeld (—). (Erklärung siehe Text).

Abb. 2 zeigt den Potentialverlauf in den Homogengebieten und im Übergang a) für den magnetfeldfreien Fall (kein Potentialgradient in den Homogengebieten, Diffusionsspannung im Übergang), b) nach Anlegen eines Magnetfeldes, das so gerichtet ist, daß die LORENTZ-Kraft die Ladungsträger nach rechts treibt. Dann entsteht auf Grund einer Ansammlung zusätzlicher positiver Raumladung im Übergang im p-Gebiet eine positive HALL-Spannung V_{H_p} , im n-Gebiet eine negative HALL-Spannung V_{H_n} . Ein floating-Potential ist zunächst nicht eingezeichnet. Unter der Abbildung sind die zwei Möglichkeiten eingezeichnet, daß der ambipolare Strom im p-Gebiet größer bzw. kleiner ist als im n-Gebiet. Im ersten Fall muß sich ein floating-Potential einstellen, das den Übergang in Flußrichtung vorspannt. Dann fließen Diffusionsströme vom Übergang weg und gleichen die ambipolaren Ströme aus. Eine Flußbelastung bedeutet aber eine Verkleinerung der Diffusionsspannung und damit eine V_{H_p} entgegengerichtete Spannung. Im zweiten Fall müssen die ausgleichenden Diffusionsströme zum Übergang hin gerichtet sein. Der Übergang wird in Sperrichtung belastet und das floating-Potential ist V_{H_n} entgegengerichtet.

Betrachten wir nun ein p-Gebiet, das von zwei p-n-Übergängen der hier betrachteten Art begrenzt wird. Da der ambipolare Strom auf den einen Übergang zufließt, vom anderen jedoch wegfließt, wird

der eine Übergang in Flußrichtung, der andere in Sperrichtung vorgespannt, beide jedoch nach (31) mit dem gleichen $|\delta\psi|$. Da es sich weiter im einen Fall um einen p-n-Übergang, im anderen Fall aber um einen n-p-Übergang handelt, bedeutet dies eine *Addition* der beiden *floating-Potentiale*.

Eine wesentliche Vereinfachung der Ergebnisse erzielen wir, wenn wir uns in (33) auf kleine x beschränken. Da in (33) die Variable z für $\alpha < 1$ immer kleiner als x ist und für $\alpha > 1$ (33) durch Einführung neuer Größen $x' = L_p/\gamma$, $\alpha' = 1/\alpha$, $\varepsilon' = 1/\varepsilon$ in eine äquivalente Form mit $z' < x'$ umgeschrieben werden kann, können wir für x (bzw. $x')$ $\ll 1$ in (33) den Tg^{-1} durch sein Argument ersetzen. Das führt z. B. im Fall der Gl. (40) auf die einfache Formel:

$$\delta\psi = -\frac{2kT}{e}x = -(\mu_n + \mu_p)E_x B_z L_n. \quad (41)$$

Wir wollen nun sehen, ob in praktisch realisierbaren Fällen der Einfluß des *floating-Potentials* so groß werden kann, daß eine Vorzeichenumkehr des HALL-Koeffizienten auftritt. Eine solche Vorzeichenumkehr wurde z. B. an p-leitendem InAs von FOLBERTH und WEISS⁸ gefunden. RUPPRECHT⁹ stellte später fest, daß diese Vorzeichenumkehr von der Oberflächenbehandlung abhängig ist, also sicher kein Volumeneffekt ist. WEISS und RUPPRECHT¹⁰ deuten diese Vorzeichenumkehr durch eine Inversionsschicht auf der Oberfläche des p-Halbleiters, die eine umgekehrte HALL-Spannung liefert und dadurch zu einem Vorzeichenwechsel des HALL-Koeffizienten führen kann. Zu ähnlichen Vorstellungen kommt DIXON¹¹. Alle diese Deutungen erfolgen ohne Berücksichtigung des *floating-Potentials*. Nun kommen WEISS und RUPPRECHT zu dem Schluß, daß die Elektronendichte in der Inversionsschicht um drei Zehnerpotenzen unter der Löcherdichte im p-Gebiet liegen muß, da die n-Schicht keinen erkennbaren Beitrag zur Leitfähigkeit liefert. In diesem Fall müßte aber ein *floating-Potential* nach unseren Überlegungen dem HALL-Beitrag der Oberflächenschicht *entgegenwirken*. Es ist also nützlich, zu diskutieren, ob nicht bereits das *floating-Potential* allein eine Vorzeichenumkehr, d. h. eine Überkompensation der HALL-Spannung von p-InAs hervorrufen kann.

Wir wollen also den Grenzfall betrachten, daß eine eventuell vorhandene Oberflächenschicht nichts zum HALL-Effekt beiträgt, sei es, daß sie (und damit

der p-n-Übergang) nur unmittelbar unter den Kontakten vorhanden ist, sei es, daß sie aus nicht-zusammenhängenden Bereichen besteht. Wir betrachten also ein p-Gebiet der Dicke l_p und vergleichen die in ihm entstehende HALL-Spannung $\mu_p E_x B_z l_p$ mit dem doppelten Wert (wegen der zwei begrenzenden p-n-Übergänge) des *floating-Potentials* (40). Die HALL-Spannung erhält dann ein anomales Vorzeichen, wenn die *floating-Potentiale* die HALL-Spannung des Inneren kompensieren, wenn also

$$\frac{2kT}{e} \frac{\sin^{-1} x}{\mu_p E_x B_z l_p} > 1 \quad (42)$$

ist. Für den Grenzfall $x \ll 1$ erhält man die einfachere Bedingung

$$\frac{\mu_n + \mu_p}{\mu_p} \frac{L_n}{l_p} > 1. \quad (43)$$

Man sieht sofort, daß eine Vorzeichenumkehr des HALL-Koeffizienten nur erreicht werden kann, wenn entweder die Diffusionslänge der Minoritätsträger groß gegen die Breite des Homogengebietes ist (ein Fall, der nur in Extremfällen eine Rolle spielen dürfte), oder wenn die Beweglichkeit der Minoritätsträger groß gegen die der Majoritätsträger ist, ein Fall, der gerade bei p-InAs besonders ausgeprägt realisiert ist.

Über die Diffusionslänge in InAs ist wenig bekannt. Wählt man den von DIXON¹² angegebenen Wert für p-Material von $5 \cdot 10^{-10}$ sec, so kommt man bei Zimmertemperatur mit einer Beweglichkeit der Elektronen von $25000 \text{ cm}^2/\text{V sec}$ auf eine Diffusionslänge von etwa 6μ . Wählt man weiter für die anderen in (42) eingehenden Parameter die Werte $B_z = 10000$ Gauß, $E_x = 1 \text{ V/cm}$, $l_p = 3 \text{ mm}$ und setzt das Beweglichkeitsverhältnis gleich 100, so liegt man im Gültigkeitsbereich von (43) ($x = 0,03$) und der Quotient in (43) wird 0,2. Eine Vorzeichenumkehr ist also im Einklang mit dem Experiment nicht zu erwarten. (Außerdem ist bei den experimentellen Kurven bei Zimmertemperatur der hier angenommene Grenzfall starker Dotierung nicht erfüllt, wohl aber bei tieferen Temperaturen.) Wir müssen deshalb sehen, ob der Quotient mit fallender Temperatur größer werden kann. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man berücksichtigt, daß es sich um stark kompensierte Präparate handelt. In ihnen ist zu erwarten, daß mit fallender Temperatur die Ionen-

⁸ O. G. FOLBERTH u. H. WEISS, Z. Naturforsch. **11a**, 510 [1956].

⁹ H. RUPPRECHT, Z. Naturforsch. **13a**, 1094 [1958].

¹⁰ H. RUPPRECHT u. H. WEISS, Z. Naturforsch. **14a**, 531 [1959].

¹¹ J. R. DIXON, Bull. Amer. Phys. Soc. Ser. II, **4**, 227 [1959].

¹² J. R. DIXON, Phys. Rev. **107**, 374 [1957].

streuung dominierend wird. Aus den gemessenen HALL-Koeffizienten geätzter Präparate (kein anomaler Nulldurchgang) findet man einen Anstieg der Löcherbeweglichkeit um den Faktor 2, wenn man von Zimmertemperatur auf 80 °K zurückgeht. Das bedeutet, daß die Löcherbeweglichkeit bereits zu einem Teil durch Ionenstreuung begrenzt wird, vorwiegend jedoch noch durch thermische Streuung beeinflußt wird. Da die Ionenstreuung um so schwächer in Erscheinung tritt, je schneller die gestreuten Ladungsträger sind, je größer also die durch thermische Streuung begrenzte Beweglichkeit ist, dürfen wir erwarten, daß in dem betrachteten Temperaturbereich die Elektronenbeweglichkeit noch einem $T^{-3/2}$ -Gesetz genügt. Damit steigt das Beweglichkeitsverhältnis von 300 °K bis 80 °K um den Faktor 3,5. Die Temperaturabhängigkeit von L_n ist nicht bekannt. L_n enthält das Produkt $(T \mu_n \tau)^{1/2}$. Solange τ schwächer als $T^{1/2}$ von der Temperatur abhängt, ist auch hier ein Anstieg des Quotienten (L_n/l_p) in (43) zu tieferen Temperaturen hin möglich. Hält man L_n/l_p konstant, so ist mit den angenommenen Parameterwerten keine Vorzeichenumkehr des HALL-Koeffizienten in dem angenommenen Temperaturbereich möglich, jedoch sofort, wenn man die Lebensdauer um einen Faktor 10 größer annimmt. Wir wollen die quantitative Diskussion hier nicht weitertreiben, da über die notwendigen Parameter noch zu wenig bekannt ist. Die Tendenz eines Anstieges des Anteiles des floating-Potentials an der HALL-Spannung mit wachsendem Beweglichkeitsverhältnis ist jedoch mit den experimentellen Tatsachen gut vereinbar.

Über das Zustandekommen der für die hier gebrachte Deutung notwendigen p-n-Übergänge an den HALL-Sonden lassen sich vorerst noch keine Aussagen machen (das gilt natürlich in gleichem Maße auch für die Oberflächenschichten, die für die andere Deutungsmöglichkeit notwendig sind). Daß der doppelte Nulldurchgang des HALL-Koeffizienten in p-InAs nur in stark gegenkompenzierten Präparaten auftritt, erklärt sich zwanglos dadurch, daß lokale oder zusammenhängende Oberflächeninversionsschichten bei Schmirgeln der Oberfläche um so leichter auftreten, je geringer die Zahl der Störungen zu sein braucht, die notwendig ist, ein Umschlagen des Leitungstyps hervorzurufen.

Wenn die hier vorgeschlagene Deutung auch nicht imstande ist, eindeutig das Zustandekommen des doppelten Nulldurchgangs des HALL-Koeffizienten in p-InAs zu erklären, so ist sie doch zumindest als Alternative zu dem bisher vorgeschlagenen Modell der zusammenhängenden Oberflächenschichten zu werten. Hinzu kommt, daß die bisherige Deutung ein völliges Fehlen von floating-Potentialen annehmen muß, jedenfalls dann, wenn die Oberflächenschicht großenordnungsmäßig von der Dicke der Diffusionslänge ist und schwächer dotiert ist als das Innere, da in diesem Fall nach (41) das floating-Potential gerade den Beitrag der Oberflächenschicht kompensieren würde. Eine eingehende Diskussion aller dieser Fragen ist aber erst möglich, wenn weitere experimentelle Ergebnisse vorliegen.

Den Herren Dr. R. GREMMELMAIER und Dr. H. RUPPRECHT danke ich für zahlreiche Diskussionen.

Trägerrekombination in Halbleitern nach hoher Anregung

Von M. ZERBST, G. WINSTEL UND W. HEYWANG

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens & Halske AG, München
(Z. Naturforsch. 14 a, 958–962 [1959]; eingegangen am 29. September 1959)

Das zeitliche Abklingen einer injizierten hohen Zusatzträgerdichte wird nach der SHOCKLEY-READSchen Modellvorstellung berechnet. Unter der Voraussetzung kleiner Rekombinationszentrendichten, die bei reinen Halbleiterstoffen im allgemeinen erfüllt ist, läßt sich ein geschlossener mathematischer Ausdruck angeben, der die für sehr hohe und sehr kleine Zusatzdichten bekannten exponentiellen Grenzgesetze enthält. Auch bei hoher Trägeranregung ist der Rekombinationsvorgang durch den Besetzungszustand der Rekombinationszentren allein bestimmt.

Die Wirkungsweise von Halbleiter-Bauelementen wird vor allem durch den Ausgleich überschüssiger – d. h. vom thermodynamischen Gleichgewicht abweichender – Ladungsträgerdichten bestimmt. Nach

SHOCKLEY und READ¹ findet dieser Ausgleich bei den im allgemeinen verwendeten Halbleitermaterialien

¹ W. SHOCKLEY u. W. T. READ JR., Phys. Rev. 87, 835 [1952].